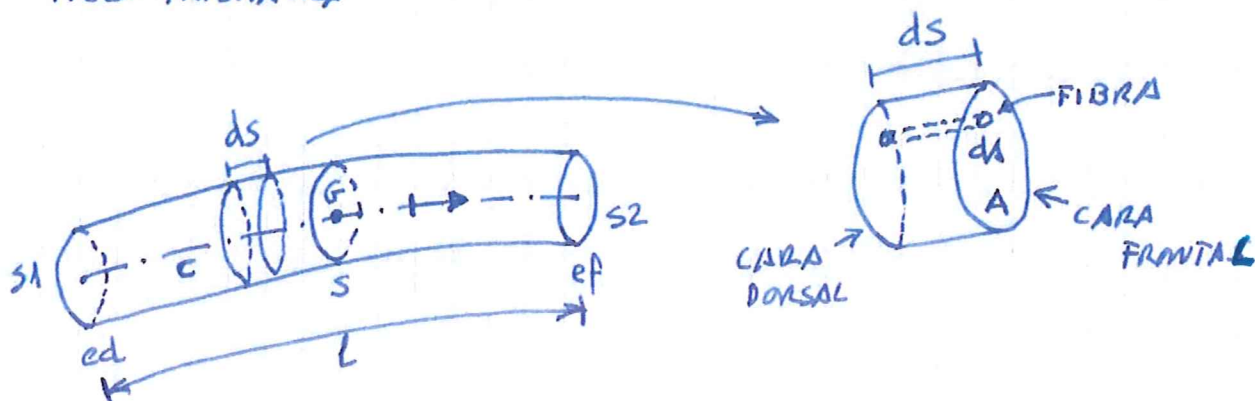


DEFINICIONES

PIEZA PRISMÁTICA



Se define como pieza prismática al volumen engendrado por el movimiento de una sección plana S (que puede tener huecos), de tal forma que su centro de gravedad G recorre la curva plana C que denominaremos directriz o eje de la pieza manteniendo la sección S normal a la directriz C .

La sección S podrá variar de tamaño de una forma suave en su movimiento a lo largo de la directriz.

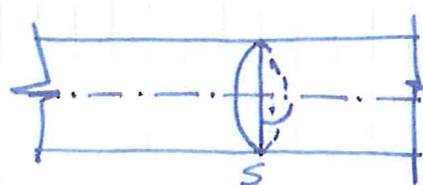
Los radios de curvatura de la directriz se suponen muy grandes comparados con cualquier dimensión de la sección.

Llamaremos a la posición inicial s_1 de la sección extremo dorsal de la pieza (ed) y a la posición final s_2 de la sección extremo frontal de la pieza (ef). Ambos extremos, dorsal y frontal, se toman totalmente de un modo arbitrario. Una vez elegidos adoptaremos siempre como sentido de recorrido de la pieza, desde el extremo dorsal al frontal.

se define como rebanada a un elemento dl de la pieza prismática comprendido entre dos secciones rectas, denominadas cara dorsal y cara frontal.

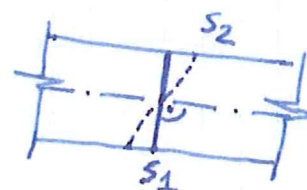
se define, como fibra en un punto al cilindro paralelo a la directriz generado por el desplazamiento del elemento da.

se cumplen las hipótesis de Navier y Navier-Bernoulli



S : sección plana y normal a la directriz.

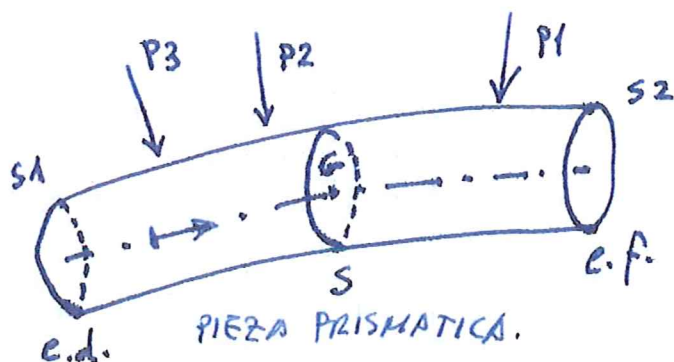
⇒ Pieza deformada



S_1 : sección plana y normal a la directriz.

El cumplimiento de ambas hipótesis implica que en la deformación de la pieza la sección S pasa a la sección S_1 y no a la sección S_2

ESFUERZOS SOBRE UNA SECCION DE LA PIEZA PRISMÁTICA

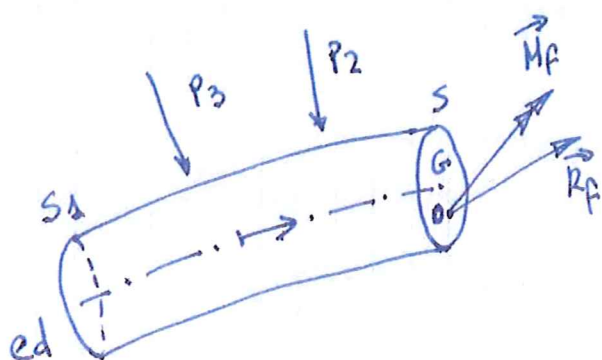


Dada la pieza prismática de la figura determinamos:

Fuerzas frontales respecto de la sección S a todas

las que actúan en secciones comprendidas entre la propia sección S y el extremo frontal S_2 , o sea, P_1

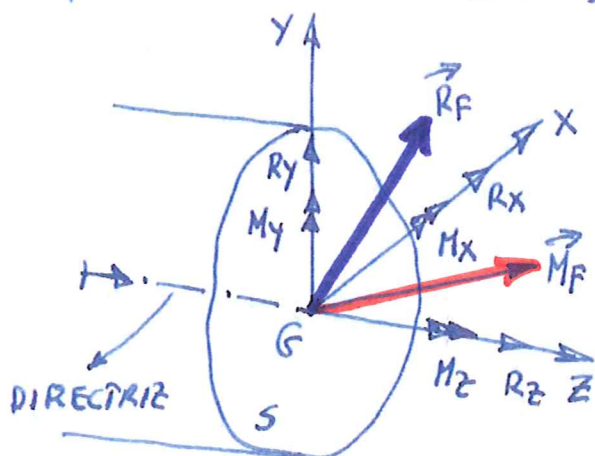
Fuerzas dorsales respecto de la sección $\underline{S}$ a todos las comprendidas entre el extremo dorsal $\underline{S_1}$ y la propia sección $\underline{S}$, o sea, P_2 y P_3 .



Supongamos que prescindimos de la parte de la pieza comprendida entre la sección $\underline{S}$ y el extremo frontal $\underline{S_2}$, tendremos que sustituir todo

el sistema de fuerzas frontales (P_1) respecto de $\underline{S}$ por un sistema de fuerzas equivalentes ($\vec{R}_F, \vec{M}_F$) reducido a un punto $\underline{O}$ de $\underline{S}$ que no tiene que ser el centro de gravedad $\underline{G}$. A este sistema lo denominaremos resultante de fuerzas frontales $\vec{R}_F$ y momento resultante frontal $\vec{M}_F$

Análogamente prescindiendo de la parte dorsal respecto de la sección $\underline{S}$ obtendremos la resultante de fuerzas dorsales $\vec{R}_d$ y de momentos dorsales $\vec{M}_d$



sistema de coordenadas de $\underline{S}$

Asociado a cada sección $\underline{S}$ consideraremos el siguiente sistema de ejes coordenados. El origen coincide con el centro de gravedad $\underline{G}$ de la sección $\underline{S}$

El eje $\underline{Y}$ es el vertical, intersección del plano de la

sección y el plano vertical de la directriz de la pieza. El eje $\underline{x}$ es el perpendicular al eje $\underline{y}$ y contenido en el plano de la sección. El eje $\underline{z}$ es perpendicular al plano de la sección $\underline{s}$, es decir, tangente a la directriz de la pieza.

En ese sistema de ejes, las resultantes $\vec{R}_F$ y $\vec{M}_F$ se descomponen sobre los tres ejes coordenados

$$\vec{R}_F \rightarrow (R_x, R_y, R_z)$$

$$\vec{M}_F \rightarrow (M_x, M_y, M_z)$$

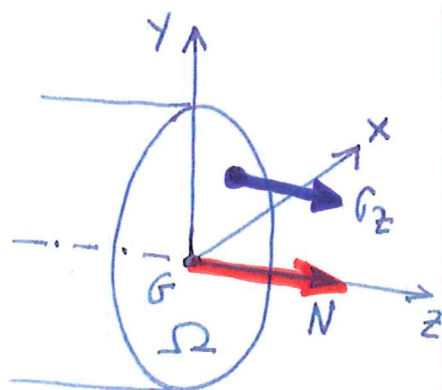
Definiciones:

- *) Esfuerzo axial: R_z carga aplicada en el centro de gravedad de la sección y perpendicular a la misma. Será de tracción si va dirigida según el sentido positivo del eje $\underline{z}$ y de compresión si va en el sentido negativo. Se denominará $\underline{N}$
- *) Esfuerzos cortantes: R_x, R_y fuerzas contenidas en el plano de la sección. Se denominará $\vec{Q}$ y es la resultante de componentes $\underline{R}_x, \underline{R}_y$.
- *) Momentos flectores: M_x, M_y . Se denominará $\vec{M}$ y es la resultante de componentes $\underline{M}_x, \underline{M}_y$
- *) Momento torsor: M_z . Se denominará M_T

En resumen los esfuerzos que actúan sobre una sección son: un axil $N (F_z)$, un cortante $\vec{Q} (R_x, R_y)$, un momento flector $\vec{M} (M_x, M_y)$, y un momento torsor $M_T (M_z)$.

Dados estos esfuerzos $N, \vec{Q}, \vec{M}, M_T$ vamos a hallar la distribución de tensiones que sobre la sección Ω producen cada esfuerzo.

DISTRIBUCION DE TENSIONES SOBRE UNA SECCION DEBIDA A UN ESFUERZO AXIL (N)



Tensión $\sigma_z = \frac{N}{\Omega}$

N : axil aplicada en el centro de gravedad G.

Ω : área de la sección.

σ_z : tensión uniformemente distribuida de tracción si N es de tracción o de compresión si N es de compresión.

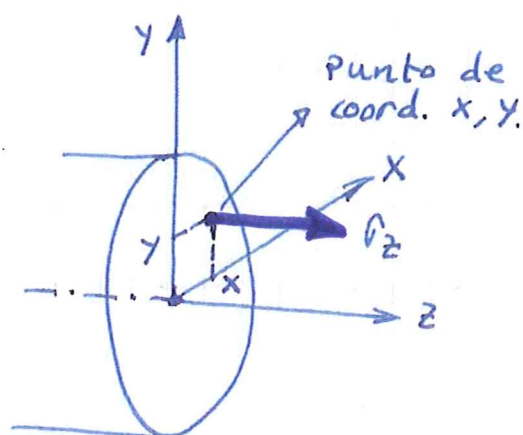
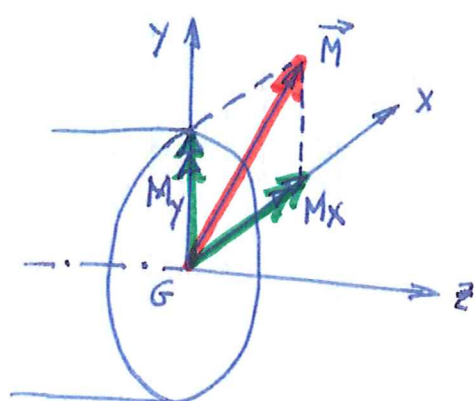
según la ley de Hooke: $\epsilon_z = E \sigma_z$

en: ϵ_z : deformación unitaria

E : Módulo de elasticidad o Módulo de Young.

DISTRIBUCION DE TENSIONES SOBRE UNA SECCION DEBIDA A UN MOMENTO FLECTOR ($\vec{M}$). FLEXION PURA

Cuando sobre una sección de una pieza prismática actúa un momento flector $\vec{M}(M_x, M_y)$ situado en el plano de la sección, se dice que está sometida a un estado de flexión pura



$$\sigma_z = M_x \left[\frac{y I_y - x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \right] - M_y \left[\frac{x I_x - y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \right]$$

σ_z : tensión en un punto de coordenadas x, y

$\vec{M}(M_x, M_y)$: Momento flector de componentes M_x, M_y

I_x : momento de inercia de la sección respecto eje x

I_y : " " " " " " " " " " y

I_{xy} : producto de inercia de la sección.

si σ_z es positiva (>0) es de tracción, si es negativa (<0) es de compresión

si los ejes (x, y) son principales de inercia $I_{xy} = 0$

$$\sigma_z = M_x \frac{y}{I_x} - M_y \frac{x}{I_y}$$

En la fórmula σ_z , los valores (x, y) y (M_x, M_y) van con signo. Son positivos los indicados en las figuras.

Por otra parte las magnitudes (I_x, I_y) son positivas y la magnitud (I_{xy}) puede ser positiva y negativa.

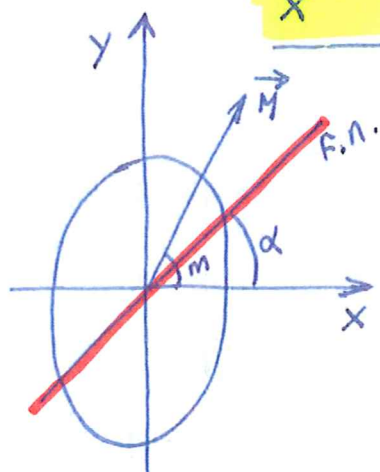
Fibra neutra. (f.n.)

Es el lugar geométrico de los puntos de tensión

$$\sigma_z = 0$$

$$[M_x I_{xy} + M_y I_x] \cdot x = [M_x I_y + M_y I_{xy}] \cdot y$$

$$\frac{y}{x} = \frac{M_x I_{xy} + M_y I_x}{M_x I_y + M_y I_{xy}}$$



En ejes principales de inercia

$$I_{xy} = 0$$

$$\frac{y}{x} = \frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y}$$

$$\tan m = \frac{M_y}{M_x}, \quad \tan \alpha = \frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y}$$

$$\text{luego } \tan \alpha = \tan m \frac{I_x}{I_y}$$

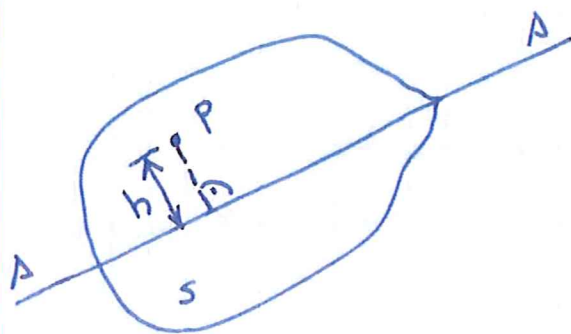
En ejes principales de inercia $I_{xy} = 0$ y además

$$\underline{M_y = 0}$$

$$\underline{\sigma_z = M_x \frac{y}{I_x}}$$

$$\text{y } \underline{\alpha = m}$$

Momento resistente (También módulo resistente)



Momento (o módulo) resistente
asociado al punto P de
la sección S: $W_p = \frac{I_{AA}}{h}$

I_{AA} : inercia respecto AA

h : mínima distancia de P a
la recta AA

De su definición $W_p = \frac{I_{AA}}{h}$ se deduce que es una
característica geométrica de la sección.

En el caso anterior de ejes principales de inercia
 $I_{xy} = 0$ y además $M_y = 0$

$$\sigma_z = M_x \frac{y}{I_x} = \frac{M_x}{W_y} \quad W_y = \frac{I_x}{y}$$

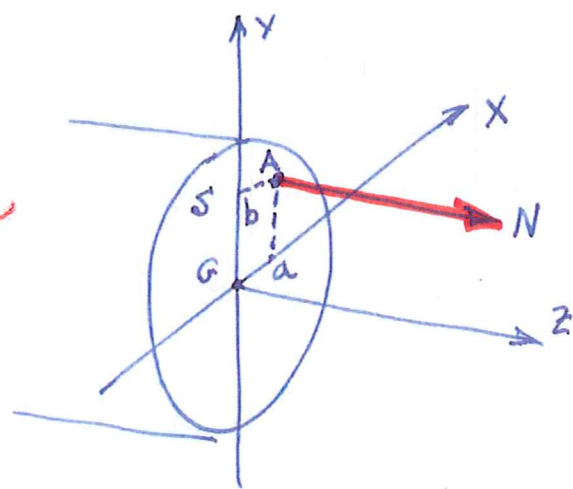
Para los puntos donde y es máxima (más alejados
del eje x) resulta W_y mínimo, y por tanto
la tensión resulta máxima $\sigma_{z \max} = \frac{M_x}{W_{y \min}}$

si σ_{adm} es la tensión admisible del material, tendremos
para el diseño $\sigma_{z \max} = \sigma_{adm}$ y por tan-
to $W_{y \min} = \frac{M_x}{\sigma_{adm}}$

Con el $W_{y \min}$ buscamos en las tablas de perfiles
el tipo de perfil (viga) necesario.

el método del Wynia es normalmente empleado con los materiales como el acero, que tienen igual resistencia a tracción y compresión

DISTRIBUCION DE TENSIONES SOBRE UNA SECCION SIMETRICA A UN ESFUERZO AXIL APLICADO EN UN PUNTO DISTINTO DEL CENTRO DE GRAVEDAD. FLEXION COMPUESTA



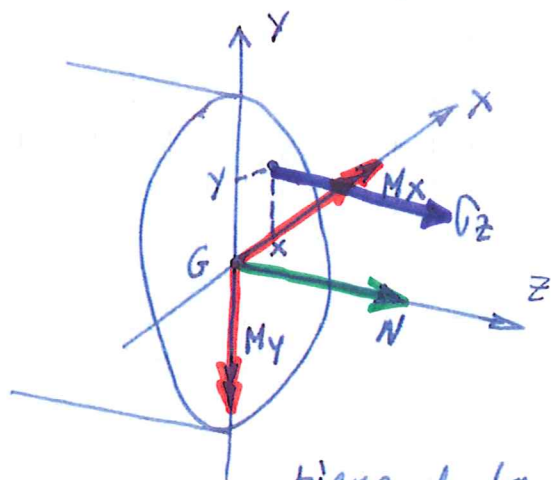
A: coordenadas (a, b) es el punto de aplicación del esfuerzo axil N

Ω : Área de la sección

I_x, I_y : Inercias de la sección

I_{xy} : producto de inercia.

El axil N se reduce a un sistema equivalente en el centro de gravedad. G



Axil: N

$$M_x = b \cdot N, \quad M_y = -a \cdot N$$

Es decir a un axil y dos momentos flectores.

La tensión σ_z en un punto de coordenadas x, y se obtiene de la siguiente expresión:

$$\sigma_z = \frac{N}{\Omega} + \underbrace{(b \cdot N)}_{M_x} \left[\frac{y \cdot I_y - x \cdot I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \right] - \underbrace{(-a \cdot N)}_{M_y} \left[\frac{x \cdot I_x - y \cdot I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \right]$$

EJES PRINCIPALES DE INERCIA $I_{xy} = 0$

$$\sigma_z = \frac{N}{\Omega} + \underbrace{(b \cdot N)}_{M_x} \frac{y}{I_x} - \underbrace{(-a \cdot N)}_{M_y} \frac{x}{I_y}$$

40

En la expresión anterior las cantidades N, a, b, x, y van dotadas de signo

$$N: \begin{cases} \text{positiva } (>0) & \text{si es tracción} \\ \text{negativa } (<0) & \text{si es compresión} \end{cases}$$

a, b, x, y : con su signo según los ejes indicados.

σ_z puede tomar valores positivos o negativos.

si σ_z es positiva (>0) va dirigida según el eje z en sentido positivo (hacia fuera sección)

si σ_z es negativa (<0) va dirigida según el eje z en sentido negativo (hacia dentro sección).

Los valores Ω, I_x, I_y son siempre positivos. El valor I_{xy} puede ser positivo o negativo pero I_{xy}^2 es siempre positivo

Fibra neutra (f.n.)

Igual que en el caso anterior hacemos $\sigma_z = 0$

$$\frac{1}{\Omega} + x \left[\frac{a \cdot I_x - b I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \right] + y \left[\frac{b I_y - a I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \right] = 0$$

$$\text{operando} \quad \frac{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2}{\Omega} + x [a I_x - b I_{xy}] + y [b I_y - a I_{xy}] = 0$$

La fibra neutra es una recta que no pasa por el centro de gravedad como en el caso de flexión pura. Como se deduce de la ecuación, no depende del eje

N , solamente de su punto de aplicación (a, b) y de las características de la sección Ω, I_x, I_y, I_{xy}

En ejes x, y que sean principales de inercia se tiene que $I_{xy} = 0$ y la ecuación de la recta de la f.n. se reduce a:

$$\frac{a}{I_y} \cdot x + \frac{b}{I_x} \cdot y + \frac{1}{\Omega} = 0$$

Normalmente se denomina:

Polo: punto de aplicación del axial (a, b)

Polar: recta que define la fibra neutra.

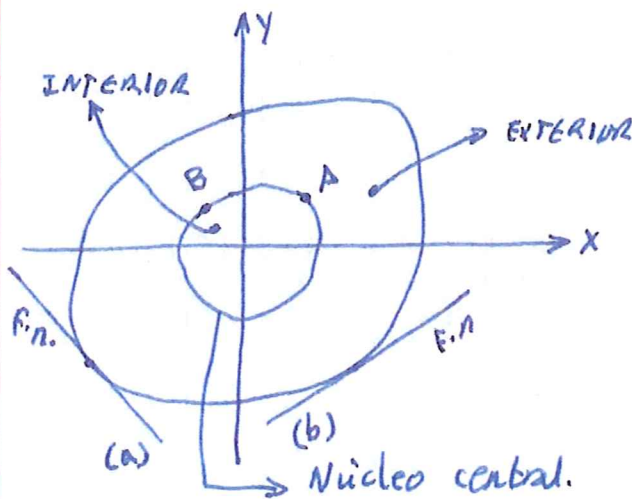
Núcleo central

La f.n. tiene la condición de $\sigma_z = 0$, por tanto divide a la sección en dos zonas, una con $\sigma_z > 0$, es decir, trabajando a tracción y otra con $\sigma_z < 0$, es decir, trabajando a compresión.

Existen materiales como el acero, que tienen igual resistencia a tracción y a compresión y no tiene tanta importancia la posición de la f.n. Sin embargo, otros como el hormigón o los pétreos, que tiene una gran resistencia a compresión y muy pequeña (casi despreciable) a tracción, en secciones de estos últimos materiales sí es importante la posi-

ción de la f.n. y por tanto, la posición del punto de aplicación de la carga N

se define el núcleo central como el lugar geométrico de los polos o puntos de aplicación de la carga para los que la f.n. correspondiente es tangente al contorno de la sección.



Así, definido el núcleo central es una curva o contorno. A, B son los polos o puntos de aplicación del axil para los que la f.n. (a) y (b) respectivamente son tangentes al contorno de la sección.

conclusiones:

- * Si el punto de aplicación del axil está en el exterior del núcleo central la f.n. corta a la sección y parte de la misma trabaja a tracción.
- * Si el punto de aplicación del axil está en la curva del núcleo central la f.n. será tangente al contorno de la sección y no habrá tracciones en la sección y en un punto del contorno, donde la f.n. es tangente la tensión es nula.
- * Si el punto de aplicación del axil es interior al contorno del núcleo central la f.n. es exterior a la sección y toda la sección trabaja a compresión.